Популярные лекции
ПО МАТЕМАТИКЕ

Ю. И. ЛЮБИЧ и Л. А. ШОР

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД В ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

АН
КНИГИ
НИКИТИНА

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВЫПУСК 42

Ю. И. ЛЮБИЧ и Л. А. ШОР

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД В ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Издание второе, исправленное

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1976

513
Л 93
УДК 513.0

АННОТАЦИЯ

Решая геометрическую задачу, полезно представить себе, что будет происходить с элемеитами рассматриваемой фигуры, если некоторые ее точки иачнут двигаться. Зависимость одних элементов от других может стать при этом наглядно очевидной, и решение задачи бросится в глаза.

Связи между величинами отрезков, углов и т. п. в геометрических фигурах обычно являются более сложными, чем связи между скоростями изменеиия этих величин в процессах деформации фигур. Поэтому для решения геометрических задач может быть полезной «теория скоростей» — кинематика.

В этой брошюре на нескольких примерах демонстрируется применение кинематики к задачам элементарной геометрии и приводится некоторое количество задач для самостоятельиого упражиения. Необходимые общие сведения из кинематики (и векторной алгебры) излагаются предварительно.

Брошюра написана на осиове лекций, прочитанных в школьном математическом кружке при Харьковском государствеином уииверситете им. А. М. Горького. Оиа рассчитаиа на учащихся 9—10 классов.

Л $\frac{20202-038}{053(02)-76}$ 85-76

© Главная редакция
физико-математической литературы
издательства «Наука», 1976,
с изменениями.

ВВЕДЕНИЕ

Однажды в серьезной математической книге *) нам встретилась задача, которая, казалось, попала туда из сочинений Конан-Дойля или Стивенсона. В ней шла речь об отыскании клада. Одному человеку было известно, что в той местности, где зарыт клад, растут только три дерева: дуб, сосна и береза. Для того чтобы найти клад, надо стать под березой (рис. 1, на котором она обозначена точкой $Б$) лицом к прямой линии, проходящей через дуб и сосну (на рис. 1 это точки $Д$ и $С$). При этом дуб должен оказаться справа, а сосна слева. Затем надо пойти к дубу, считая шаги. Дойдя до дуба, повернуть под прямым углом направо и пройти столько же шагов, сколько было пройдено от березы до дуба. В этом месте остановиться и поставить вешку (на рис. 1 это точка B_1). Затем следует вернуться к березе и пойти от нее к сосне, считая шаги. Дойдя до сосны, повернуть под прямым углом налево и пройти столько же шагов, сколько было пройдено от березы до сосны. В этом месте остановиться и поставить вешку (на рис. 1 это точка B_2). Клад зарыт точно посредине между вешками (на рис. 1 это точка $К$).

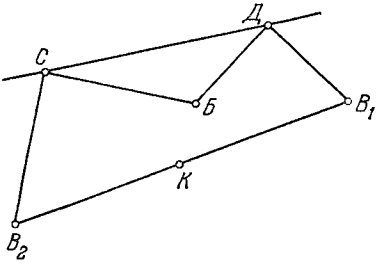


Рис. 1.

При такой подробной инструкции отыскание клада не могло вызвать затруднений. Однако они все-таки

*) Т. Саати, Математические методы исследования операций, Воениздат, 1963.

возникли. Дело в том, что когда кладоискатель попал в указанную местность, он обнаружил там только дуб и сосну. Березы же не было и в помине. И все же он нашел клад. Спрашивается, как ему это удалось?

Поскольку задача была приведена в Серьезной Математической книге, следовало ожидать, что дело здесь не просто в удаче. И, действительно, задача имеет математическое решение, кстати вполне доступное школьнику.

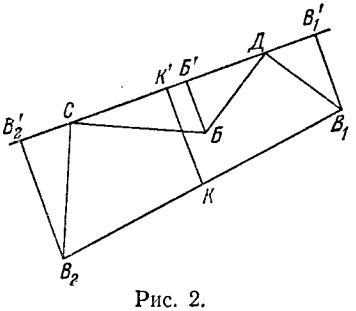


Рис. 2.

Опустим из точек B_1, B_2, $Б$ и K перпендикуляры на прямую $ДС$ (см. рис. 2). Основания их обозначим через B_1', B_2', $Б'$ и K' соответственно. Отметим равенство следующих пар прямоугольных треугольников (по стороне и острому углу):

$$\triangle ДB_1B_1' = \triangle ДББ'; \ \triangle CB_2B_2' = \triangle CББ'.$$

Из равенства треугольников следует, что $B_1B_1' = ДБ'$, $ДB_1' = ББ'$ и $B_2B_2' = СБ'$, $СB_2' = ББ'$. Так как точка K — середина отрезка B_1B_2, то KK' — средняя линия трапеции $B_1B_1'B_2B_2'$ и поэтому

$$KK' = \frac{1}{2}(B_1B_1' + B_2B_2') = \frac{1}{2}(ДБ' + Б'C) = \frac{1}{2}ДC.$$

Далее, точка K' — середина отрезка $B_1'B_2'$ и так как $ДB_1' = СB_2' (= ББ')$, то K' — середина отрезка $ДС$. Таким образом, положение точки K не зависит от положения точки $Б$. Чтобы найти точку K, достаточно к отрезку $ДС$ восставить перпендикуляр в его середине и отложить на этом перпендикуляре отрезок, равный $\frac{1}{2}ДС$, в такую сторону, чтобы точка $Д$ оказалась справа, а точка C — слева.

Хотя приведенное решение безупречно, оно все-таки оставляет чувство некоторой неудовлетворенности. Основная идея — опустить перпендикуляры из точек B_1, B_2, $Б$ и K на прямую $ДС$ — никак не связана с постановкой задачи и, на наш взгляд, явля-

ется весьма искусственной*). Гораздо более естественно выяснить, как зависит положение точки K от положения точки $Б$, или, иначе, как будет двигаться точка K при движении точки $Б$. Эта идея подсказывается, кстати, и самой фабулой задачи. Легко себе представить, что, не увидев березы, кладоискатель начинает бродить по местности в поисках ее остатков и при этом рассуждает: «Если бы береза была здесь, то клад должен был бы быть там, а если береза была бы здесь, то ...». И тут он мог бы заметить, что положение клада не зависит от положения березы. Заметив это, он взялся бы за заступ, отложив поиски доказательства до лучших времен. Нас же, в отличие от него, интересует как раз вопрос о том, как, рассуждая таким образом, не только заметить, но и доказать, что положение точки K (клада) не зависит от положения точки $Б$ (березы).

Представим себе, что точка $Б$ начала двигаться. Пусть $\boldsymbol{v}$ — вектор ее мгновенной скорости. Так как отрезок $ДВ_1$ получается из отрезка $ДБ$ поворотом на угол $\frac{\pi}{2}$, то точка B_1 будет двигаться согласованно с точкой $Б$, а именно так, что вектор $\boldsymbol{v}_1$ ее скорости будет получаться из вектора $\boldsymbol{v}$ поворотом на угол $\frac{\pi}{2}$. Аналогично, вектор $\boldsymbol{v}_2$ скорости точки B_2 будет получаться из $\boldsymbol{v}$ поворотом на угол**) $-\frac{\pi}{2}$. Поэтому $\boldsymbol{v}_2 = -\boldsymbol{v}_1$. И значит, точка K как середина отрезка B_1B_2 имеет скорость

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{0}.$$

Но если скорость точки все время равна нулю, то эта точка неподвижна! Итак, при произвольном движении точки $Б$ точка K остается неподвижной.

---

*) Подобные «искусственности» очень часто встречаются в решениях геометрических задач. Это дало повод известному французскому математику Ж. Фавару сказать, что для многих людей «геометрия остается искусством доказывать какое-нибудь свойство, рассматривая коварно выбранный круг и удачно соединяя старательно разобщенные точки».

**) Напомним, что угол поворота считается положительным, если поворот происходит против часовой стрелки, и отрицательным, если поворот происходит по часовой стрелке.

Следовательно, положение точки K не зависит от положения точки $Б$.

Чтобы найти теперь положение точки K, достаточно выбрать одно какое-нибудь положение точки $Б$. Пожалуй, проще всего совместить точку $Б$ с точкой C и применить построение, известное кладоискателю (рис. 3).

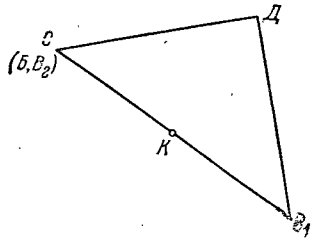


Рис. 3.

Это решение, основанное на кинематических соображениях, при всей его естественности, может показаться трудным школьнику ввиду недостаточного знакомства его со свойствами векторов и скоростей.

Поэтому в книжке, посвященной применению кинематического метода к геометрическим задачам, нам пришлось довольно много рассказать о векторах и о скоростях. Эти понятия играют важную роль в ряде разделов математики и физики. Поэтому ознакомление с ними полезно и само по себе.

В §§ 1—2 многое не доказывается, а лишь поясняется. Но, обращаясь к чертежам и размышляя самостоятельно, читатель сможет без особого труда прийти к достаточно полным доказательствам. Сведущий читатель может ограничиться беглым ознакомлением с материалом этих параграфов.

Параграф 3 — основной в этой книге. Там разобрано некоторое число задач на применение кинематического метода и сформулированы задачи для самостоятельного упражнения.

§ 1. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

п° 1. *Векторами* называются направленные отрезки. На чертеже векторы изображаются отрезками, снабженными стрелками, указывающими направление (см. рис. 4). Начало вектора называется также его точкой приложения. Вектор с началом A и концом B обозначается $\overline{AB}$ (но не $\overline{BA}$! $\overline{BA}$ обозначает вектор с началом B и концом A). Часто для обозначения вектора применяют одну букву, например, $\overline{AB} = \boldsymbol{a}$.

Эту букву принято печатать жирным шрифтом, чтобы сразу дать понять, что речь идет о векторе, а не о числе. Если вектор обозначен, например, через $\boldsymbol{a}$, то его длина обозначается $|\boldsymbol{a}|$, подобно абсолютной величине числа *). Длина вектора часто также называется *абсолютной величиной*.

Равенство двух векторов понимается не как полная тождественность, а несколько шире. Именно, два век-

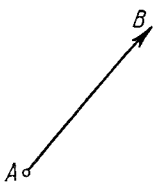


Рис. 4.

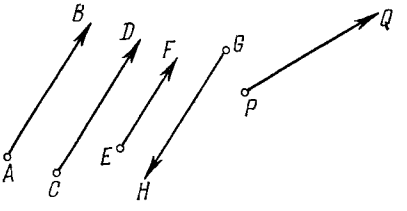


Рис. 5.

тора называются *равными*, если их длины равны, а направления одинаковы. Таким образом, равные векторы обязательно параллельны или лежат на одной прямой (короче говорят: «коллинеарны»). На рис. 5

$$\overline{AB} = \overline{CD},\ \overline{AB} \neq \overline{PQ},\ \overline{AB} \neq \overline{EF},\ \overline{AB} \neq \overline{GH}.$$

Из определения равенства вытекает, что при параллельном переносе вектор не изменяется.

Для дальнейшего важно рассматривать точку как отрезок, начало и конец которого совпадают. Такой «вырожденный» отрезок тоже считается вектором, но ему не приписывается никакого определенного направления **). Он называется *нулевым* вектором и обозначается $\mathbf{0}$. Его длина равна нулю: $|\mathbf{0}| = 0$.

n° 2. *Суммой* векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется вектор $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, идущий из начала вектора $\boldsymbol{a}$ в конец вектора $\boldsymbol{b}$ (рис. 6), при условии, что начало вектора $\boldsymbol{b}$ совмещено с концом вектора $\boldsymbol{a}$ (этого всегда можно добиться параллельным переносом вектора $\boldsymbol{b}$).

*) Длина вектора $\overline{AB}$ часто обозначается просто AB.

**) То есть любое направление считается направлением этого вектора.

Сложение векторов, как и сложение чисел, подчиняется переместительному и сочетательному законам.

Переместительный закон выражается формулой

$$a + b = b + a. \qquad (1)$$

Его справедливость усматривается из рис. 7, на котором векторы a и b приложены в одной точке и служат сторонами параллелограмма. Диагональ этого параллелограмма, идущая из общего начала векторов a и b, равна (как вектор) с одной стороны сумме $a + b$, с другой стороны — сумме $b + a$.

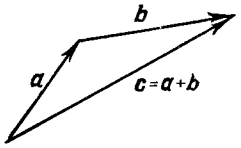


Рис. 6.

Сочетательный закон выражается формулой

$$(a + b) + c = a + (b + c), \qquad (2)$$

справедливость которой усматривается из рис. 8.

Благодаря переместительному и сочетательному законам можно при сложении векторов так же, как и при сложении чисел, не обращать внимания ни на порядок слагаемых, ни на их группировку. В частности, можно писать просто $a + b + c$, опуская скобки.

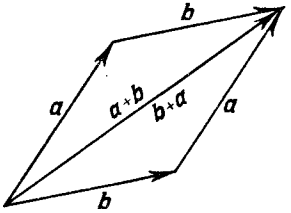


Рис. 7.

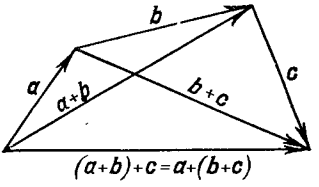


Рис. 8.

Сложение нескольких векторов поясняется на рис. 9, на котором векторы a_1, a_2, a_3, a_4, последовательно приложенные друг к другу, образуют ломаную, «замыкаемую» вектором-суммой $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$.

Очевидно, сумма нескольких векторов равна нулю тогда и только тогда, когда образованная ими ломаная замкнута, т. е. конец последнего слагаемого вектора совпадает с началом первого (см. рис. 10).

Пусть, например,

$$a + b = 0.$$

Тогда длина вектора $\boldsymbol{b}$ должна быть равна длине вектора $\boldsymbol{a}$, а направление прямо противоположно направлению вектора $\boldsymbol{a}$. Определенный таким образом вектор $\boldsymbol{b}$ называется *противоположным* вектору $\boldsymbol{a}$ и обозначается $-\boldsymbol{a}$.

Формулы

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}, \tag{3}$$

непосредственно вытекающие из определений, играют важную роль в векторной алгебре. В частности, с их

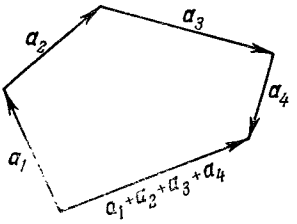


Рис. 9.

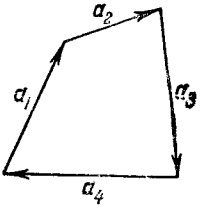


Рис. 10.

помощью можно исследовать операцию вычитания векторов, обратную к операции сложения.

n° 3. *Разностью* $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется такой вектор $\boldsymbol{c}$, что

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}. \tag{4}$$

Способ построения разности указан на рис. 11, *а*. Вместе с тем вычитание можно свести к сложению следующим образом. Прибавим к обеим частям равенства (4) вектор $-\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})+(-\boldsymbol{b}).$$

В силу сочетательного и переместительного законов получаем:

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}+[\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{b})],$$

откуда в силу формул (3)

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{c}.$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}). \tag{5}$$

Это дает еще один способ построения разности, указанный на рис. 11, *б*.

Отметим еще формулы

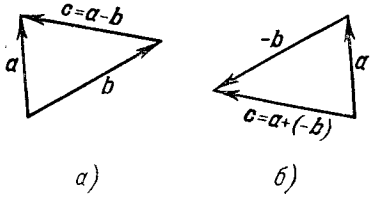
$$a - 0 = a, \quad 0 - a = -a, \quad a - a = 0. \tag{6}$$

Между прочим, поскольку согласно определению разности равенства

$$a - b = c, \quad a = b + c$$

означают одно и то же, то вектор можно переносить из одной части равенства в другую с противоположным знаком.

n° 4. Нам понадобится одно важное неравенство, которое называется *неравенством треугольника.*



а) *б)*

Рис. 11.

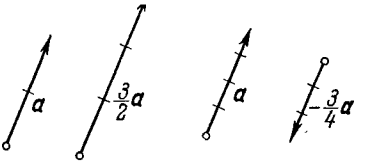


Рис. 12.

Обратимся к рис. 6 (стр. 8). Согласно известной геометрической теореме имеет место неравенство

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|. \tag{7}$$

Здесь знак равенства достигается тогда и только тогда, когда векторы одинаково направлены.

Можно указать еще несколько неравенств, аналогичных неравенству треугольника, например,

$$|a - b| \leqslant |a| + |b|; \quad |a - b| \geqslant |a| - |b|. \tag{8}$$

n° 5. *Произведением* λa вектора a на вещественное число λ называется вектор c, определяемый следующими условиями.

1) $|c| = |\lambda| \cdot |a|$ ($|\lambda|$ — абсолютная величина числа λ);

2) c коллинеарен вектору a;

3) при $\lambda > 0$ направление вектора c совпадает с направлением вектора a, при $\lambda < 0$ эти направления противоположны. На рис. 12 представлены случаи

$\lambda=\frac{3}{2}$ и $\lambda=-\frac{3}{4}$. Очевидно,

$$\boldsymbol{a}=1\cdot\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{a},\ \ldots$$

и

$$-\boldsymbol{a}=(-1)\cdot\boldsymbol{a},\quad (-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})=(-2)\cdot\boldsymbol{a};$$
$$(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})=(-3)\cdot\boldsymbol{a},\ \ldots$$

Перечислим основные законы, которым подчиняется умножение вектора на число.

1) *Сочетательный закон*

$$\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\mu\lambda)\,\boldsymbol{a} \tag{9}$$

иллюстрируется рис. 13, на котором представлены случаи $\lambda>0$, $\mu>0$ и $\lambda>0$, $\mu<0$.

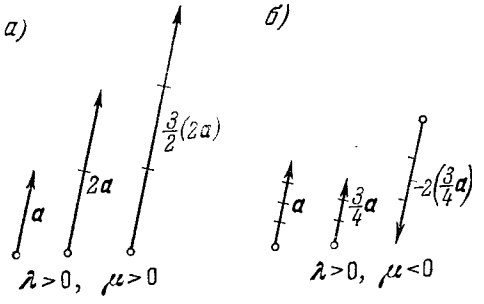


Рис. 13.

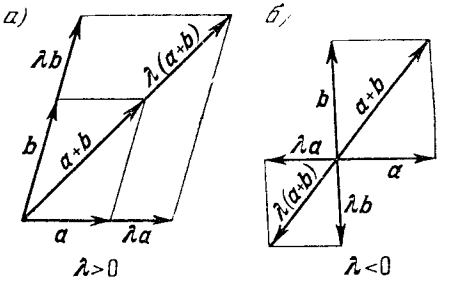


Рис. 14.

2) *Распределительный закон относительно числового множителя*

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b} \tag{10}$$

иллюстрируется на рис. 14, на котором представлены случаи $\lambda > 0$ и $\lambda < 0$.

3) *Распределительный закон относительно векторного множителя*

$$(\lambda + \mu)\, a = \lambda a + \mu a \tag{11}$$

иллюстрируется рис. 15, на котором представлены случаи $\lambda > 0$, $\mu > 0$ и $\lambda > 0$, $\mu < 0$, $\lambda + \mu > 0$.

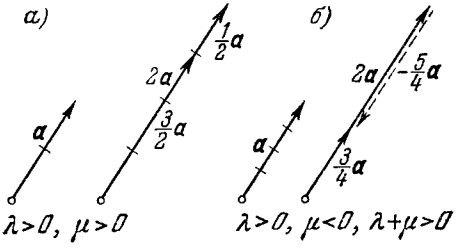


Рис. 15.

Обратим еще внимание читателя на очевидные равенства:

$$0 \cdot a = 0, \quad \lambda \cdot 0 = 0. \tag{12}$$

Можно ввести и *деление вектора на число*. Частным от деления вектора a на число $\lambda \neq 0$ называется произведение вектора a на число, обратное к λ:

$$\frac{a}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \cdot a. \tag{13}$$

Итак, мы видим, что рассмотренные действия векторной алгебры подчиняются тем же основным законам, что и соответствующие действия над числами. Поэтому в векторной алгебре справедливы все логические следствия этих законов, что позволяет оперировать с векторами так же, как с числами. Например, в выражении $(\lambda + \mu)(a + b)$ можно обычным образом раскрыть скобки, в результате чего получим $\lambda a + \lambda b + \mu a + \mu b$ (это следует из распределительных законов).

n° 6. Начиная с этого места, мы будем считать, что все векторы лежат в одной плоскости *), т. е. будем заниматься только планиметрией.

*) Читатель, не знакомый со стереометрией, по-видимому, с самого начала так и считал. Он не потерял при этом ничего существенного.

Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — два неколлинеарных вектора и $\boldsymbol{c}$ — какой-нибудь третий вектор. Если вектор $\boldsymbol{c}$ коллинеарен одному из векторов $\boldsymbol{a}$ или $\boldsymbol{b}$, например, вектору $\boldsymbol{a}$, то найдется такое число λ, что

$$\boldsymbol{c} = \lambda \boldsymbol{a}. \tag{14}$$

В общем случае приложим все три вектора в одной точке O (рис. 16) и после этого проведем через конец C вектора $\boldsymbol{c}$ прямые, параллельные векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Они пересекутся с прямыми, на которых лежат $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, в точках A и B соответственно.

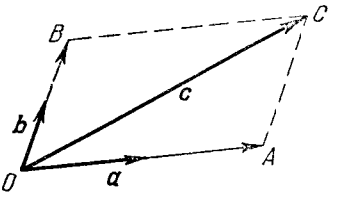


Рис. 16.

Очевидно,

$$\boldsymbol{c} = \overline{OA} + \overline{OB}.$$

Но так как векторы $\overline{OA}$ и $\boldsymbol{a}$ коллинеарны, то найдется такое число λ, что

$$\overline{OA} = \lambda \boldsymbol{a}.$$

Аналогично найдется такое число μ, что

$$\overline{OB} = \mu \boldsymbol{b}.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{c} = \lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b}. \tag{15}$$

Представление вектора $\boldsymbol{c}$ в виде (15) называется *разложением* этого вектора по векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Любой вектор $\boldsymbol{c}$ можно разложить по двум неколлинеарным векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Коэффициенты λ и μ при этом определены единственным образом.

Отметим, что равенство (14) записывается в виде (15) с коэффициентом $\mu = 0$.

n° 7. Пусть A, B, C — три точки, лежащие на одной прямой. Говорят, что точка C делит отрезок AB в отношении $m : n$, если *)

$$n\overline{AC} = m\overline{CB}. \tag{16}$$

*) Числа m, n — любые вещественные, не равные нулю одновременно. Если $m = 0$, то точка C совпадает с точкой A; если $n = 0$, то C совпадает с B.

Очевидно, абсолютная величина отношения $m:n$ равна отношению длин $AC:CB$. Отношение $m:n$ положительно, если точка C лежит внутри отрезка AB, и отрицательно, если она лежит вне отрезка (рис. 17).

Теорема. *Пусть точка C делит отрезок AB в отношении $m:n$ и пусть O — произвольная точка плоскости* (рис. 18). *Тогда*

$$\overline{OC} = \frac{n\overline{OA} + m\overline{OB}}{m+n}. \qquad (17)$$

Обратно, *если для какой-нибудь точки O выполнено равенство* (17), *то точка C делит отрезок в отношении $m:n$.*

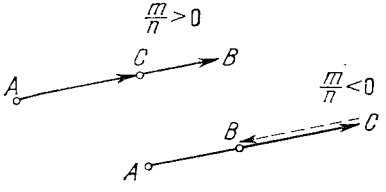


Рис. 17.

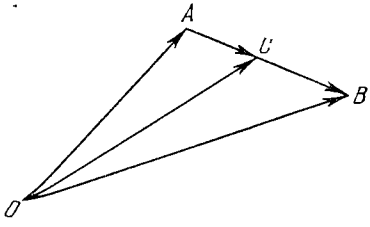


Рис. 18.

Доказательство. Пусть выполняется (16). Так как

$$\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA}, \quad \overline{CB} = \overline{OB} - \overline{OC},$$

то

$$n(\overline{OC} - \overline{OA}) = m(\overline{OB} - \overline{OC}).$$

Решая это уравнение относительно $\overline{OC}$, приходим к (17).

Аналогично из (17) получается (16).

n° 8. Как известно, *осью* называется прямая, снабженная «положительным» направлением.

Пусть l — некоторая ось и $\overline{AB}$ — некоторый вектор (рис. 19). Обозначим через A_1 и B_1 проекции точек A и B на ось l (т. е. основания перпендикуляров к l, проведенных через A и B). Рассмотрим число, равное длине отрезка A_1B_1, взятой со знаком плюс, если направление вектора $\overline{A_1B_1}$ совпадает с направлением оси l, и взятой со знаком минус в противоположном случае. Это число называется *проекцией* вектора $\overline{AB}$ на ось l и обозначается $\text{пр}_l\overline{AB}$.

Пусть φ — угол между вектором $\boldsymbol{a}$ и осью l, заключенный между 0 и π (рис. 20). Очевидно,

$$\text{пр}_l \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \cdot \cos\varphi. \qquad (18)$$

В частности, если $\boldsymbol{a}$ перпендикулярен к l, то $\text{пр}_l \boldsymbol{a} = 0$.

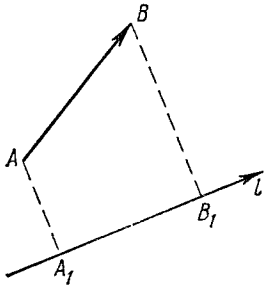


Рис. 19.

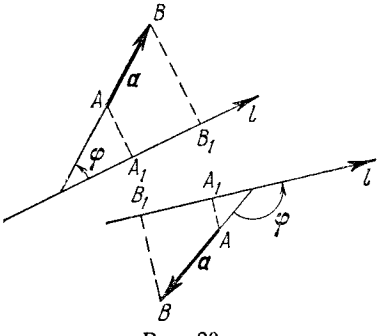


Рис. 20.

Отметим еще два свойства проекций (рис. 21, 22):

1) $\text{пр}_l(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \text{пр}_l \boldsymbol{a} + \text{пр}_l \boldsymbol{b}$,

2) $\text{пр}_l(\lambda \boldsymbol{a}) = \lambda\, \text{пр}_l \boldsymbol{a}$ (λ — любое число).

Эти свойства принято выражать следующими словами: «проектирование вектора на ось является *линейной операцией* над векторами». Последовательно применяя свойства 1) и 2), можно написать вообще:

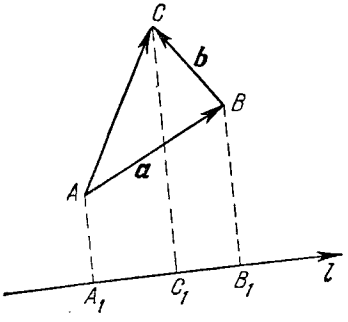


Рис. 21.

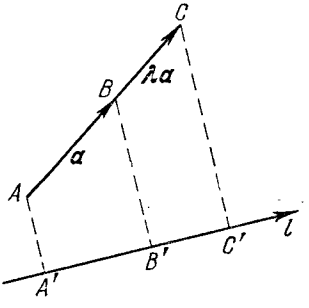


Рис. 22.

$$\text{пр}_l(\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n) = \\ = \lambda_1\, \text{пр}_l \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\, \text{пр}_l \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_n\, \text{пр}_l \boldsymbol{a}_n \qquad (19)$$

для любых векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ и любых чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Между прочим, умножение вектора на число λ тоже есть линейная операция (см. (9), (10)).

n° 9. Еще один важный пример линейной операции дает операция поворота вектора на заданный угол α (положительный, отрицательный или нулевой — безразлично). Эту операцию мы будем обозначать через U_α, а результат ее применения к вектору $\boldsymbol{a}$ —

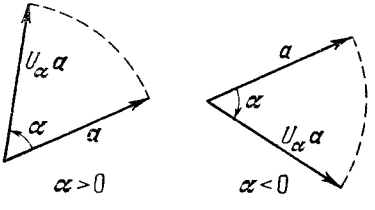


Рис. 23.

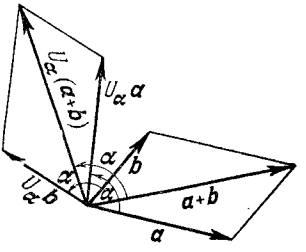


Рис. 24.

через $U_\alpha \boldsymbol{a}$. Таким образом, вектор $U_\alpha \boldsymbol{a}$ получается из вектора $\boldsymbol{a}$ поворотом на угол α. При этом, очевидно,

$$|U_\alpha \boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{a}| \tag{20}$$

(рис. 23).

Очевидно, $U_0 \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$, т. е. операция U_0 не меняет вектора. Операция, не меняющая вектора, называется *тождественной операцией.*

Заметим еще, что

$$U_\pi \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}, \quad U_{2\pi} \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}. \tag{21}$$

Как было уже сказано, операция поворота U_α линейна:

1) $U_\alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = U_\alpha \boldsymbol{a} + U_\alpha \boldsymbol{b}$ (рис. 24),

2) $U_\alpha(\lambda \boldsymbol{a}) = \lambda U_\alpha \boldsymbol{a}$, где λ — любое число (рис. 25).

Следовательно, подобно (19),

$$U_\alpha(\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n) = \\ = \lambda_1 U_\alpha \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 U_\alpha \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_n U_\alpha \boldsymbol{a}_n. \tag{22}$$

n° 10. Пусть S, T — две операции над векторами (например, S — проектирование вектора на некоторую ось l, T — поворот вектора на прямой угол). Результат последовательного выполнения двух операций называется *произведением операций.* При этом, вообще говоря, важен порядок, в котором выполняются операции. Если в приведенном выше примере

пары операций S, T взять лежащий на оси l вектор $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$ и применить к нему сначала T, а затем S, то получается 0; если же к $\boldsymbol{a}$ применить сначала S, то получится число, а к числу попросту нельзя применить операцию T (операция T применяется только к векторам).

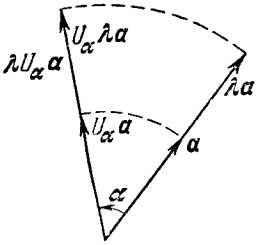


Рис. 25.

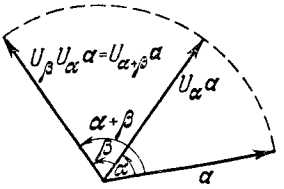


Рис. 26.

Если сначала выполняется операция T, а затем операция S, то произведение записывается в виде ST. Таким образом, по определению

$$(ST)\,\boldsymbol{a} = S(T\boldsymbol{a}) \tag{23}$$

для любого вектора $\boldsymbol{a}$.

Рис. 26 показывает, что $U_\beta U_\alpha \boldsymbol{a} = U_{\alpha+\beta}\boldsymbol{a}$ для любого вектора $\boldsymbol{a}$, т. е. короче *):

$$U_\beta U_\alpha = U_{\alpha+\beta}. \tag{24}$$

Отсюда видно, что

$$U_\alpha U_\beta = U_\beta U_\alpha, \tag{25}$$

хотя, вообще говоря, $ST \neq TS$.

Если $ST = TS$, то говорят, что операции S и T *перестановочны*. Таким образом, любые два поворота перестановочны. Любой поворот перестановочен также с умножением на число (свойство 2 операции U_α).

Из формулы (24) следует

$$U_{-\alpha} U_\alpha = U_0,$$

т. е. $U_{-\alpha}U_\alpha \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ для любого вектора $\boldsymbol{a}$.

*) Две операции T_1, T_2 над векторами считаются равными, если $T_1\boldsymbol{a} = T_2\boldsymbol{a}$ для всех векторов $\boldsymbol{a}$.

Свойства поворотов и других геометрических преобразований могут быть с успехом использованы для решения разнообразных задач (см. книгу И. М. Яглом, Геометрические преобразования, I, II, Гостехиздат, 1955—1956).

§ 2. ЭЛЕМЕНТЫ КИНЕМАТИКИ

n° 1. Возьмем на плоскости какую-нибудь точку O — *полюс*. Для произвольной точки M вектор $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$ (рис. 27) называется ее *радиусом-вектором* относительно полюса O. Точка и ее радиус-вектор взаимно определяют друг друга.

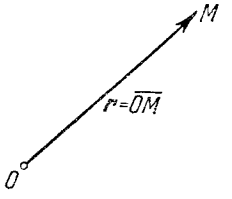


Рис. 27.

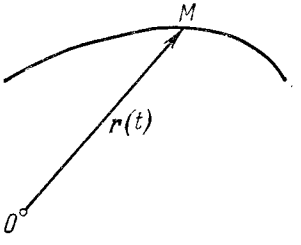


Рис. 28.

Если точка движется, описывая некоторую траекторию (рис. 28), то ее радиус-вектор изменяется в зависимости от времени; он является *функцией* от времени. Это обозначается так:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \quad (t — \text{время}). \tag{1}$$

Слово «изменяется» нельзя понимать здесь слишком буквально. Важным частным случаем движения является покой. Если точка покоится, то ее радиус-вектор во все моменты времени будет одним и тем же. Как функция от времени он является постоянной, «константой». Это записывается так:

$$\boldsymbol{r} = \text{const}. \tag{2}$$

Когда говорят, что, например, $\boldsymbol{r}$ есть функция от t, имеют в виду только тот факт, что при каждом значении t вектор $\boldsymbol{r}$ является вполне определенным: если t фиксировано, то $\boldsymbol{r}$ уже не может меняться.

n° 2. Рассмотрим какой-нибудь промежуток времени $[t_0, t_1]$ $(t_1 > t_0)$, начинающийся в момент t_0 и кончающийся в момент t_1. Длительность этого промежутка равна *)

$$\Delta t = t_1 - t_0. \qquad (3$$

Если в момент t_0 радиус-вектор движущейся точки M равен $\boldsymbol{r}_0$ $(\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}(t_0))$, а в момент t_1 он равен $\boldsymbol{r}_1$ $(\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}(t_1))$, то вектор

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0$$

показывает перемещение точки M за промежуток времени $[t_0, t_1]$ (рис. 29).

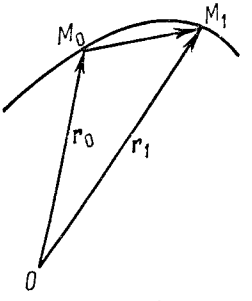


Рис. 29.

Мы хотим теперь ввести важнейшее понятие *скорости движения*. Грубо говоря, скорость — это перемещение за единицу времени. При этом скорость должна описывать как абсолютную величину перемещения за единицу времени, так и направление этого перемещения, т. е. скорость должна быть вектором.

Если мы знаем, что за промежуток времени $[t_0, t_1]$ точка M испытала перемещение $\Delta \boldsymbol{r}$, то чтобы получить перемещение за единицу времени, естественно разделить $\Delta \boldsymbol{r}$ на длительность промежутка времени. При этом получится вектор, который называется *средней скоростью точки за данный промежуток времени*:

$$\boldsymbol{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}. \qquad (4)$$

Этот вектор направлен так же, как вектор перемещения $\Delta \boldsymbol{r}$, но его абсолютная величина равна расстоянию M_0M_1, деленному на Δt, т. е. говоря грубо, — пути, проходимому точкой за единицу времени.

Что мы хотим подчеркнуть словами «грубо говоря»? Дело в том, что точка M в течение промежутка времени $[t_0, t_1]$ движется, как правило, неравномерно, т. е. за равные части этого промежутка времени

*) Значок Δ употребляется для обозначения *приращения* какой-нибудь величины, т. е. для обозначения того, на сколько изменилась величина.

она проходит неравные пути. К тому же она движется, как правило, не по прямой M_0M_1, а по кривой, соединяющей те же точки. Вектор перемещения Δr характеризует лишь итог этого движения, но не его промежуточные стадии. То же относится и к вектору средней скорости, и это подчеркивается словом «средняя».

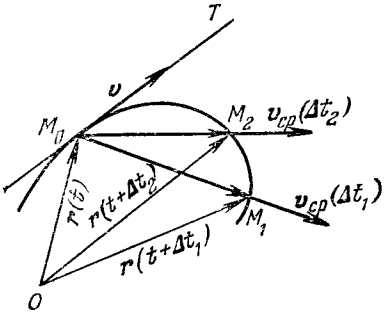


Рис. 30.

Легко понять, однако, что средняя скорость будет достаточно точной характеристикой движения, если длительность промежутка времени весьма мала. Поэтому для получения идеально точной характеристики нужно устремить время Δt к нулю, т. е. фиксируя начало t_0 промежутка времени, устремить t_1 к t_0. При этом средняя скорость $v_{ср}$ будет, вообще говоря, стремиться к некоторому пределу v:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}. \qquad (5)$$

В какой-то степени это иллюстрируется рис. 30.

Вектор v называется (*мгновенной*) *скоростью движения в момент* t_0. Его направление является предельным для направлений векторов средних скоростей.

Вектор средней скорости за промежуток $[t_0, t_1]$ лежит на секущей M_0M_1. Если t_1 стремится к t_0, то точка M_1 стремится к точке M_0, двигаясь по траектории. При этом секущая M_0M_1, поворачиваясь, стремится к некоторому предельному положению M_0T. Прямая, предельная для секущей M_0M_1, называется *касательной к траектории в точке* M_0 *). Вектор скорости в момент t_0 лежит на касательной к траектории в точке M_0.

Недостаточно подготовленного читателя могут смутить слова «стремится», «предел», «предельное

*) Читателю рекомендуется сопоставить это общее определение касательной с обычным «школьным» определением касательной к окружности.

положение». К тому же мы употребляем эти слова в применении к переменным векторам (и даже к переменным прямым), а не только числам. Для переменных чисел смысл этих слов должен быть читателю известен из школьного курса математики, где излагаются элементы теории пределов. Но нам нужна более общая теория, которую мы сейчас вкратце изложим.

n° 3. Пусть $\rho(s)$ — функция числового аргумента s, принимающая числовые значения *). Напомним читателю точный смысл равенства

$$\lim_{s \to 0} \rho(s) = 0 \tag{6}$$

и соответствующей фразы: «функция $\rho(s)$ стремится к нулю при s, стремящемся к нулю». Они означают, что каким бы малым ни было число $\varepsilon > 0$, найдется столь малое число $\delta > 0$, что неравенство

$$|\rho(s)| < \varepsilon$$

будет выполняться при всех $|s| < \delta$.

Пусть теперь $\boldsymbol{a}(s)$ — векторная функция аргумента s. Вектор $\boldsymbol{b}$ называется *пределом* для $\boldsymbol{a}(s)$ при s, стремящемся к нулю (запись: $\boldsymbol{b} = \lim\limits_{s \to 0} \boldsymbol{a}(s)$), если скалярная функция

$$\rho(s) = |\boldsymbol{a}(s) - \boldsymbol{b}|$$

стремится к нулю при s, стремящемся к нулю.

Основные теоремы теории пределов для векторных функций аналогичны известным читателю теоремам для скалярных функций.

Теорема 1. *Двух различных пределов у одной и той же функции быть не может* **).

Доказательство. Пусть

$$\boldsymbol{b}_1 = \lim_{s \to 0} \boldsymbol{a}(s) \quad \text{и} \quad \boldsymbol{b}_2 = \lim_{s \to 0} \boldsymbol{a}(s).$$

---

*) Такие функции называют *скалярными* в противоположность *векторным*.

**) Но может не быть ни одного: предел может не существовать, но, если он существует, то он единствен.

Очевидно,

$$\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 = [\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{a}(s)] + [\boldsymbol{a}(s) - \boldsymbol{b}_2].$$

Отсюда согласно неравенству треугольника

$$|\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2| \leqslant |\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{a}(s)| + |\boldsymbol{a}(s) - \boldsymbol{b}_2|.$$

Так как оба слагаемых в правой части последнего неравенства стремятся к нулю при $s \to 0$, а левая часть неравенства не зависит от s, то она не может быть положительной:

$$|\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2| \leqslant 0.$$

Но она не может быть и отрицательной (длина вектора всегда неотрицательна). Следовательно,

$$|\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2| = 0.$$

Это означает, что $\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{0}$, т. е. $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}_2$.

Теорема 2. *Если*

$$\lim_{s \to 0} \boldsymbol{a}_1(s) = \boldsymbol{b}_1, \quad \lim_{s \to 0} \boldsymbol{a}_2(s) = \boldsymbol{b}_2,$$

то

$$\lim_{s \to 0} (\boldsymbol{a}_1(s) + \boldsymbol{a}_2(s)) = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2$$

(«*предел суммы равен сумме пределов*»).

Теорема 3. *Если*

$$\lim_{s \to 0} \boldsymbol{a}(s) = \boldsymbol{b},$$

то при любом фиксированном числе λ *будет*

$$\lim_{s \to 0} \lambda \boldsymbol{a}(s) = \lambda \boldsymbol{b}$$

(«*предел произведения на число равен произведению предела на это число*»).

Доказательство теорем 2 и 3 предоставляется читателю *).

Теорема 4. *Если*

$$\lim_{s \to 0} \boldsymbol{a}(s) = \boldsymbol{b},$$

*) При доказательстве теоремы 2 следует воспользоваться неравенством треугольника.

то для любого фиксированного угла α будет

$$\lim_{s\to 0} U_\alpha \boldsymbol{a}(s) = U_\alpha \boldsymbol{b}.$$

Доказательство. Имеем (см. § 1, формулу (20)):

$$|U_\alpha \boldsymbol{a}(s) - U_\alpha \boldsymbol{b}| = |U_\alpha(\boldsymbol{a}(s) - \boldsymbol{b})| = |\boldsymbol{a}(s) - \boldsymbol{b}|.$$

Так как по условию

$$\lim_{s\to 0} |\boldsymbol{a}(s) - \boldsymbol{b}| = 0,$$

то и

$$\lim_{s\to 0} |U_\alpha \boldsymbol{a}(s) - U_\alpha \boldsymbol{b}| = 0,$$

т. е.

$$\lim_{s\to 0} U_\alpha \boldsymbol{a}(s) = U_\alpha \boldsymbol{b}.$$

n° 4. Теперь мы в состоянии изложить в нужном нам виде теорию скоростей.

Скорость точки определяется равенством (5) *).

Физически очевидна следующая

Теорема 5. *Скорость неподвижной точки все время* **) *равна нулю.*

Доказательство. Действительно, если точка неподвижна, то для любого промежутка времени вектор ее перемещения равен нулю, т. е. $\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$.

Следовательно, $\boldsymbol{v}_{\text{ср}} = \dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \boldsymbol{0}$. Но тогда и $\boldsymbol{v} = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \boldsymbol{v}_{\text{ср}} = \boldsymbol{0}$ в каждый момент времени.

Сформулируем обратную теорему.

Теорема 5′. *Если скорость точки все время (в течение которого рассматривается движение этой точки) равна нулю, то точка остается неподвижной.*

---

*) Читатель, знакомый с дифференцированием, может сказать: «скорость точки есть производная от ее радиуса-вектора по времени». Дифференцирование является одной из важнейших операций в математике. Доступное школьнику изложение дифференцирования содержится в брошюре В. Г. Болтянского «Что такое дифференцирование?» (Гостехиздат, 1955).

**) Разумеется, в течение которого эта точка неподвижна.

При всей своей физической очевидности эта теорема с математической точки зрения не так проста. Дабы не заходить слишком далеко в сторону, мы опускаем ее доказательство.

Теоремы 5 и 5′ говорят о том, что равенство

$$\boldsymbol{r} = \text{const}$$

равносильно равенству $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.

Теорема 6. *Пусть* $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_1(t)$, $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_2(t)$, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ — *радиусы-векторы точек* M_1, M_2, M *соответственно. Если точки движутся так, что все время*

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2,$$

то их скорости связаны аналогичным соотношением:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2. \qquad (7)$$

Доказательство. Вектор перемещения точки M за промежуток времени $[t, t + \Delta t]$ равен

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t) = [\boldsymbol{r}_1(t + \Delta t) + \boldsymbol{r}_2(t + \Delta t)] - [\boldsymbol{r}_1(t) + \boldsymbol{r}_2(t)] = [\boldsymbol{r}_1(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}_1(t)] + [\boldsymbol{r}_2(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}_2(t)] = \Delta \boldsymbol{r}_1 + \Delta \boldsymbol{r}_2.$$

Отсюда

$$\boldsymbol{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}_1}{\Delta t} + \frac{\Delta \boldsymbol{r}_2}{\Delta t} = \boldsymbol{v}_{1\text{ср}} + \boldsymbol{v}_{2\text{ср}}$$

и по теореме 2

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{v}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{v}_{1\text{ср}} + \lim_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{v}_{2\text{ср}} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2,$$

что и требовалось доказать.

Аналогичная теорема справедлива для разности.

Теорема 6′. *Если скорости точек* M_1, M_2, M *все время связаны соотношением* (7), *то все время*

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 + \text{const}. \qquad (8)$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную точку P, радиус-вектор которой все время равен

$$\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{r} - (\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2). \qquad (9)$$

Но тогда скорость точки P равна, по доказанному ранее, $\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2)$, т. е. равна нулю. Следовательно, точка P неподвижна, т. е. $\overrightarrow{OP} = \text{const}$. Отсюда и из (9) непосредственно вытекает (8).

Аналогично теоремам 6 и 6′ могут быть доказаны (с помощью теорем 3, 4) следующие пары теорем.

Теорема 7. *Пусть* $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_1(t)$, $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_2(t)$ — *радиусы-векторы точек* M_1 *и* M_2 *соответственно. Если точки движутся так, что все время*

$$\boldsymbol{r}_2 = \lambda \boldsymbol{r}_1,$$

где λ — *постоянное число, то их скорости связаны аналогичным соотношением*

$$\boldsymbol{v}_2 = \lambda \boldsymbol{v}_1. \qquad (10)$$

Теорема 7′. *Если скорости точек* M_1, M_2 *все время связаны соотношением* (10), *то все время*

$$\boldsymbol{r}_2 = \lambda \boldsymbol{r}_1 + \text{const}.$$

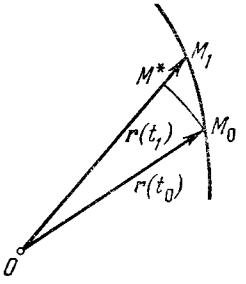


Рис. 31.

Теорема 8. *Пусть* $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_1(t)$, $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_2(t)$ — *радиусы-векторы точек* M_1 *и* M_2 *соответственно. Если точки движутся так, что все время*

$$\boldsymbol{r}_2 = U_\alpha \boldsymbol{r}_1,$$

где α — *постоянный угол, то их скорости связаны аналогичным соотношением*

$$\boldsymbol{v}_2 = U_\alpha \boldsymbol{v}_1. \qquad (11)$$

Теорема 8′. *Если скорости точек* M_1, M_2 *все время связаны соотношением* (11), *то все время*

$$\boldsymbol{r}_2 = U_\alpha \boldsymbol{r}_1 + \text{const}.$$

n° 5. Пусть $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ — радиус-вектор движущейся точки M. Рассмотрим перемещение $\overrightarrow{M_0M_1} = \Delta\boldsymbol{r}$ точки за некоторый промежуток времени $[t_0, t_1]$ (рис. 31). Проведем дугу окружности с центром в полюсе O и радиусом OM_0. Она пересечет луч OM_1 в точке M^*. Очевидно,

$$\Delta\boldsymbol{r} = \overrightarrow{M_0M_1} = \overrightarrow{M_0M^*} + \overrightarrow{M^*M_1}. \qquad (12)$$

Перемещение $\overrightarrow{M_0M^*}$ не изменяет расстояния движущейся точки M от полюса O и связано только с поворотом луча OM. Перемещение $\overrightarrow{M^*M_1}$ связано только с изменением расстояния точки M от полюса.

Деля обе части равенства (12) на $\Delta t = t_1 - t_0$ и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{M_0 M^*}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{M^* M_1}}{\Delta t}. \qquad (13)$$

Первый из пределов, стоящих в равенстве (13) справа, называется *трансверсальной скоростью* точки M и обозначается v_τ, второй — называется *радиальной скоростью* точки M и обозначается v_ρ.

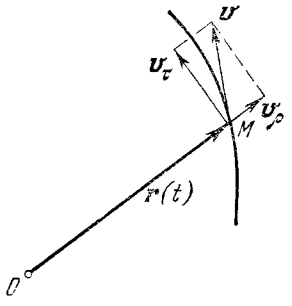


Рис. 32.

Итак,

$$v = v_\tau + v_\rho. \qquad (14)$$

Формула (14) дает разложение вектора скорости на радиальную и трансверсальную составляющие (рис. 32). Эти составляющие взаимно перпендикулярны.

Радиальная скорость есть скорость изменения расстояния точки M от полюса O или, что то же самое, — скорость изменения длины радиуса-вектора $\overline{OM}$. Она направлена вдоль этого вектора, если OM возрастает, и в противоположную сторону, если OM убывает.

Обозначим проекцию вектора скорости точки M на ось, определяемую вектором $\overline{OM}$, через v_ρ. Очевидно,

$$v_\rho = \pm |v_\rho|,$$

где плюс берется в случае возрастания OM, а минус — в случае убывания.

Если точка M движется по окружности с центром в полюсе, то ее полная скорость совпадает с трансверсальной:

$$v = v_\tau, \quad v_\rho = 0.$$

Если же точка движется по лучу, исходящему из полюса, то ее полная скорость совпадает с радиальной:

$$v = v_\rho, \quad v_\tau = 0.$$

n° 6. Рассмотрим вращение луча OM вокруг его начальной точки O. Пусть за промежуток времени

$[t, t + \Delta t]$ луч повернулся на угол *) $\Delta\varphi$. *Средней угловой скоростью* луча за промежуток времени $[t, t + \Delta t]$ называется отношение

$$\omega_{ср} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Предел средней угловой скорости $\omega_{ср}$ при $\Delta t \to 0$ называется (*мгновенной*) *угловой скоростью* луча и обозначается просто ω:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \omega_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Угловая скорость — это не вектор, а число **). Она положительна, если вращение луча происходит в положительном направлении, и отрицательна, если луч вращается в отрицательном направлении.

Для угловых скоростей справедливы следующие теоремы, аналогичные теоремам о скоростях точек.

Теорема 9. *Угловая скорость луча все время равна нулю тогда и только тогда, когда луч все время неподвижен.*

Теорема 10. *Угловые скорости двух лучей* ***) O_1M *и* O_2M *все время равны тогда и только тогда, когда угол между лучами остается постоянным.*

§ 3. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД В ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Теперь мы можем во всеоружии приступить к решению геометрических задач. Прежде всего мы рекомендуем повторно проанализировать кинематическое решение «задачи кладоискателя», указанное во введении. При этом необходимо проследить, как используется материал §§ 1—2, с тем чтобы лучше подготовиться к дальнейшим задачам.

Задача 1 ****). *На сторонах произвольного треугольника* ABC *построены вне него равносторонние*

*) Этот угол может иметь любой знак.

**) Для неплоских движений угловая скорость вводится более сложным образом и там она оказывается векторной величиной.

***) O_1, O_2 — любые две (может быть, и совпадающие) неподвижные точки.

****) Эта задача, так же как и большинство приведенных ниже задач, заимствована из серии книг «Библиотека математического кружка» И. М. Яглома и др. Некоторые задачи взяты из книги Ж. Адамара «Элементарная геометрия», т. 1 (Учпедгиз, 1948).

треугольники ABC', BCA' и ACB' (рис. 33). *Доказать, что центры O_1, O_2 и O_3 этих треугольников сами являются вершинами равностороннего треугольника.*

Решение. Закрепим вершины A и B треугольника ABC и будем двигать вершину C. Пусть v_C — ее скорость. При этом треугольник ABC' будет оставаться неизменным, а вершины A' и B' равносторонних треугольников $A'BC$ и $AB'C$ будут каким-то определенным образом двигаться. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AO_2}$. Очевидно,

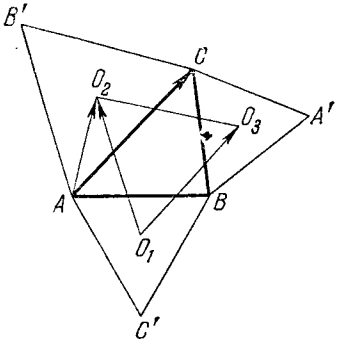


Рис. 33.

$$AO_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} AC.$$

Кроме того, угол между векторами $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AO_2}$ равен $\frac{\pi}{6}$. Поэтому, если мы повернем вектор AC на угол $\frac{\pi}{6}$ (при этом длина его не изменится) и умножим полученный вектор на $\frac{1}{\sqrt{3}}$, то получим вектор $\overrightarrow{AO_2}$. Это можно записать так:

$$\overrightarrow{AO_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} U_{\frac{\pi}{6}} \overrightarrow{AC}.$$

По теореме 8

$$v_{O_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} U_{\frac{\pi}{6}} v_C$$

(v_{O_2} — скорость точки O_2).

Аналогично

$$v_{O_3} = \frac{1}{\sqrt{3}} U_{-\frac{\pi}{6}} v_C.$$

Отсюда

$$v_C = \sqrt{3}\, U_{\frac{\pi}{6}} v_{O_3}.$$

Следовательно,

$$v_{O_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} U_{\frac{\pi}{6}} \sqrt{3}\, U_{\frac{\pi}{6}} v_{O_3} = U_{\frac{\pi}{6}} U_{\frac{\pi}{6}} v_{O_3} = U_{\frac{\pi}{3}} v_{O_3}. \qquad (1)$$

Примем теперь неподвижную точку O_1 за полюс. Тогда из равенства (1) согласно теореме 8′ получится

$$\overline{O_1O_2} = U_{\frac{\pi}{3}}\overline{O_1O_3} + \boldsymbol{R},$$

где вектор $\boldsymbol{R} = \text{const}$, т. е. $\boldsymbol{R}$ не зависит от положения подвижной точки C. Вектор $\boldsymbol{R}$ неизвестен, но его можно найти, выбирая одно какое-нибудь положение точки C, которое мы будем кратко называть в дальнейшем *определяющим положением*. Если окажется, что в определяющем положении точки C вектор $\boldsymbol{R}$ равен нулю, то, будучи постоянным, он равен нулю всегда, т. е. всегда

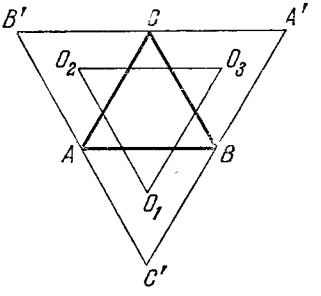


Рис. 34.

$$\overline{O_1O_2} = U_{\frac{\pi}{3}}\overline{O_1O_3}. \qquad (2)$$

Но это как раз и означает, что треугольник $O_1O_2O_3$ всегда является равносторонним!

Действительно, в (2) написано, что отрезок O_1O_2 получается из отрезка O_1O_3 поворотом на угол, равный $\frac{\pi}{3}$.

Остается найти подходящее определяющее положение точки C. Его целесообразно выбирать так, чтобы вся конфигурация была как можно более простой. В данной задаче конфигурация выглядит весьма просто (рис. 34), если точка C занимает такое положение, при котором треугольник ABC — равносторонний. Здесь имеет место симметрия: конфигурация совмещается сама с собой при повороте на угол $\frac{2}{3}\pi$ вокруг центра треугольника ABC. Поэтому треугольник $O_1O_2O_3$ оказывается равносторонним, и следовательно,

$$\overline{O_1O_2} = U_{\frac{\pi}{3}}\overline{O_1O_3},$$

т. е. в этом положении действительно $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{0}$.

Упражнения. **1.** Доказать, что утверждение задачи 1 справедливо, если треугольники ABC', BCA', ACB' заменить треугольниками ABC'', BCA'', ACB'', симметричными им относительно сторон треугольника ABC (рис. 35).

2. На сторонах произвольного треугольника ABC построены равносторонние треугольники BCA', ACB', ABC', так что вершины A' и

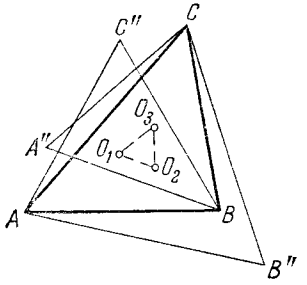


Рис. 35.

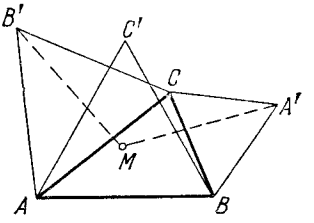


Рис. 36.

A, B' и B расположены соответственно по разные стороны от BC и AC, а C' и C по одну сторону от AB (рис. 36). Доказать, что если точка M есть центр треугольника ABC', то треугольник $A'MB'$ равнобедренный и угол при его вершине M равен $\frac{2}{3}\pi$.

3. На сторонах произвольного треугольника ABC вне него построены равнобедренные треугольники BCA', ACB' и ABC' с углами

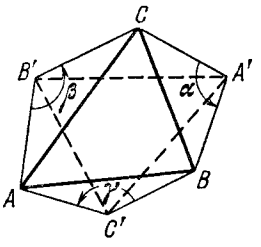


Рис. 37.

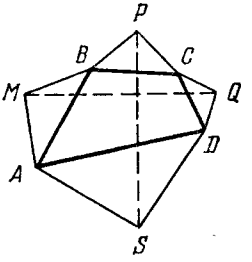


Рис. 38.

при вершинах A', B' и C', соответственно равными α, β и γ (рис. 37). Доказать, что если

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\pi,$$

то углы треугольника $A'B'C'$ равны $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$, т. е. не зависят от формы треугольника ABC. Один частный случай этого утверждения известен как «задача Наполеона» (см. журнал «Квант», 1972, № 6, стр. 29).

Задача 2. *Дан четырехугольник $ABCD$. На сторонах его снаружи построены равнобедренные прямоугольные треугольники ABM, BCP, CDQ и DAS*

(рис. 38). *Доказать, что отрезки MQ и SP равны и перпендикулярны.*

Решение. Закрепим вершины A, B и D и начнем двигать вершину C. Так как

$$\overline{BP} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_{\frac{\pi}{4}} \overline{BC},$$

то

$$v_P = \frac{1}{\sqrt{2}} U_{\frac{\pi}{4}} v_C.$$

Аналогично

$$v_Q = \frac{1}{\sqrt{2}} U_{-\frac{\pi}{4}} v_C.$$

Перейдя от соотношения между скоростями к соотношению между радиусами-векторами, получим:

$$\overline{SP} = U_{\frac{\pi}{2}} \overline{SQ} + \text{const}.$$

Так как $\overline{SQ} = \overline{SM} + \overline{MQ}$ и $\overline{SM} = \text{const}$, то

$$\overline{SP} = U_{\frac{\pi}{2}} \overline{MQ} + \boldsymbol{R},$$

где $\boldsymbol{R} = \text{const}$.

Выберем определяющее положение вершины C. Например, совместим ее с вершиной A. Четырехугольник $ABCD$ превратится при этом в две пары слившихся отрезков $AB = CB$ и $AD = CD$ (рис. 39). Треугольники ABM и CBP образуют квадрат, построенный на AB как на диагонали. Аналогично, треугольники ADS и CDQ образуют квадрат с диагональю AD. Отсюда следует, что поворотом на $\frac{\pi}{2}$ треугольник ASP совмещается с треугольником AQM (при этом точка S совмещается с точкой Q, а точка P с точкой M). Поэтому для рассматриваемого положения точки C

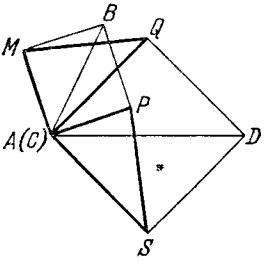


Рис. 39.

$$\overline{SP} = U_{\frac{\pi}{2}} \overline{MQ}.$$

Таким образом здесь, а значит, и всегда

$$\boldsymbol{R} = 0,$$

т. е. всегда

$$\overline{SP} = U_{\frac{\pi}{2}}\overline{MQ}.$$

Но это равенство говорит о том, что отрезок SP всегда получается из отрезка MQ поворотом на прямой угол. Следовательно,

$$SP = MQ, \quad SP \perp MQ.$$

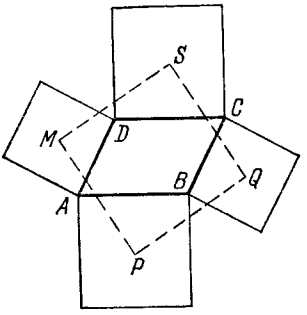


Рис. 40.

Задача 3. *На сторонах произвольного параллелограмма $ABCD$ вне него построены квадраты. Доказать, что их центры M, P, Q и S сами являются вершинами квадрата* (рис. 40).

Решение. Закрепим точки A и D и будем двигать отрезок BC параллельно самому себе. При этом точки B и C будут двигаться с одной и той же скоростью. Эту же скорость будет иметь точка Q — центр квадрата *), построенного на отрезке BC.

Подсчитаем скорость точки S — центра квадрата, построенного на отрезке CD. Так как

$$\overline{DS} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_{\frac{\pi}{4}}\overline{DC},$$

то

$$\boldsymbol{v}_S = \frac{1}{\sqrt{2}} U_{\frac{\pi}{4}}\boldsymbol{v}_C.$$

Аналогично,

$$\boldsymbol{v}_P = \frac{1}{\sqrt{2}} U_{-\frac{\pi}{4}}\boldsymbol{v}_B.$$

Так как

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_Q,$$

*) Весь квадрат будет двигаться, как говорят, поступательно.

то

$$\boldsymbol{v}_S = \frac{1}{\sqrt{2}} U_{\frac{\pi}{4}} \boldsymbol{v}_Q, \quad \boldsymbol{v}_P = \frac{1}{\sqrt{2}} U_{-\frac{\pi}{4}} \boldsymbol{v}_Q.$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{MS} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_{\frac{\pi}{4}} \overrightarrow{MQ} + \boldsymbol{R}_1, \quad \overrightarrow{MP} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_{-\frac{\pi}{4}} \overrightarrow{MQ} + \boldsymbol{R}_2,$$

где

$$\boldsymbol{R}_1 = \text{const}, \quad \boldsymbol{R}_2 = \text{const}.$$

В качестве определяющего возьмем то положение отрезка BC, в котором четырехугольник $ABCD$ является квадратом. Тогда окажется

$$\boldsymbol{R}_1 = 0, \quad \boldsymbol{R}_2 = 0.$$

Таким образом, уже не только в этом положении, но и всегда

$$\overrightarrow{MS} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_{\frac{\pi}{4}} \overrightarrow{MQ}, \quad \overrightarrow{MP} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_{-\frac{\pi}{4}} \overrightarrow{MQ},$$

а эти равенства означают, что четырехугольник $MPQS$ — квадрат.

Упражнения. **4.** Доказать, что утверждение задачи 3 сохранится, если все квадраты заменить симметричными им относительно сторон параллелограмма $ABCD$.

5. Дан четырехугольник $ABCD$. Доказать, что если вершины P и S равнобедренных прямоугольных треугольников ABP и CDS совпадают между собой, то совпадают также и вершины Q и T равнобедренных прямоугольных треугольников BCQ и DAT (рис. 41). Все треугольники строятся внутри четырехугольника $ABCD$.

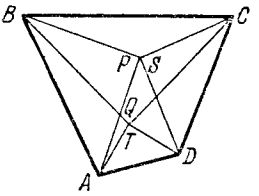


Рис. 41.

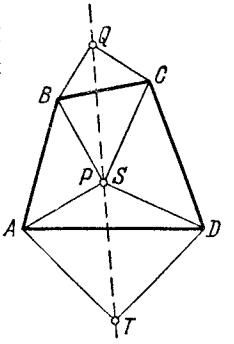


Рис. 42.

6. Дан четырехугольник $ABCD$. На сторонах BC и DA снаружи и на сторонах AB и CD внутри четырехугольника построены равнобедренные прямоугольные треугольники ABP, BCQ, CDS, DAT

(рис. 42). Доказать, что если вершины P и S совпадают, то отрезок QT проходит через них и делится ими пополам.

7. Доказать, что в задаче 1 отрезки AA', BB' и CC' равны и, пересекаясь в одной точке, образуют углы, равные $\frac{2}{3}\pi$.

Задача 4. *Даны четыре прямые a, b, c, d, попарно пересекающиеся в шести точках A, B, C, D, E и F* (рис. 43). *Доказать, что середины M, P и Q отрезков AC, BE и DF лежат на одной прямой.*

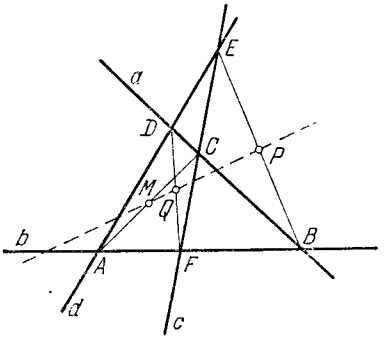


Рис. 43.

Решение. Закрепим прямые b, c, d и будем перемещать прямую a параллельно самой себе. Точки B, C и D будут при этом двигаться по прямым b, c и d. Скорости их обозначим через v_B, v_C и v_D.

Пусть a' — смещенное положение прямой a и B', C', D' — смещенные положения точек B, C и D (рис. 44).

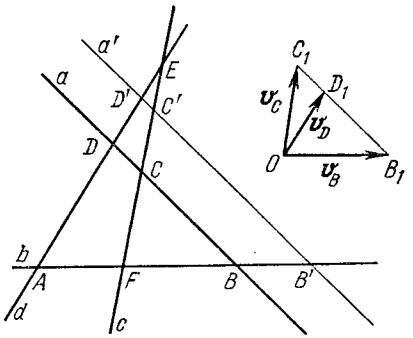


Рис. 44.

Начала и концы векторов $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{DD'}$ лежат соответственно на параллельных прямых a и a'. Следовательно, если совместить начала этих векторов, то их концы окажутся на одной прямой, параллельной a. Векторы $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ и $\overrightarrow{DD'}$ пропорциональны скоростям v_B, v_C и v_D точек B, C и D. Поэтому если векторы v_B,

$\boldsymbol{v}_C$ и $\boldsymbol{v}_D$ отложить из некоторой точки O, то их концы B_1, C_1 и D_1 будут лежать на одной прямой (параллельной прямой a). Отсюда согласно теореме из § 1, п° 7 следует, что существуют такие постоянные числа m и n, что

$$\boldsymbol{v}_B = \frac{m\boldsymbol{v}_C + n\boldsymbol{v}_D}{m+n}. \tag{3}$$

Точка M (см. рис. 43) является серединой отрезка AC, т. е. $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AC}$. Так как точка A неподвижна, то отсюда следует, что

$$\boldsymbol{v}_M = \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_C. \tag{4}$$

Аналогично получаем равенства

$$\boldsymbol{v}_Q = \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_D, \quad \boldsymbol{v}_P = \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_B. \tag{5}$$

В силу (3)—(5)

$$\boldsymbol{v}_P = \frac{m\boldsymbol{v}_M + n\boldsymbol{v}_Q}{m+n}.$$

Примем теперь неподвижную точку E за полюс.

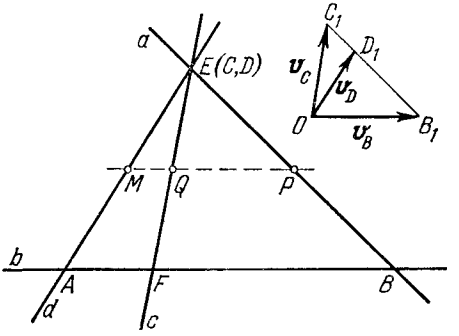


Рис. 45.

Тогда, последовательно, применяя теоремы 6′ и 7′, будем иметь:

$$\overline{EP} = \frac{m\overline{EM} + n\overline{EQ}}{m+n} + \boldsymbol{R}, \quad \boldsymbol{R} = \text{const}. \tag{6}$$

Пусть прямая a в определяющем положении проходит через точку E (рис. 45). В этом положении точки D и C совмещаются с точкой E. Точки M, Q и P оказываются серединами отрезков AE, FE и BE. Так как точки A, F и B лежат на одной прямой, то точки M, Q и P будут также лежать на одной прямой (параллельной b). Треугольники PEQ и B_1C_1O подобны (стороны одного параллельны сторонам другого: $PE \| a \| B_1C_1$; $PQ \| b \| OB_1$; $EQ \| c \| OC_1$).

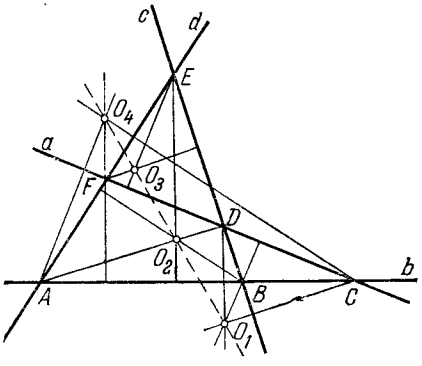


Рис. 46.

Аналогично подобны треугольники PEM и B_1D_1O. Из подобия треугольников следует

$$\frac{B_1D_1}{OB_1} = \frac{PE}{MP}, \quad \frac{C_1B_1}{OB_1} = \frac{PE}{PQ},$$

Отсюда

$$\frac{MP}{PQ} = \frac{C_1B_1}{B_1D_1},$$

т. е. точки P и B_1 делят соответственно отрезки MQ и C_1D_1 в одном и том же отношении. Но для точки B_1 оно равно $m : n$. Следовательно, и для точки P оно равно $m : n$, откуда

$$\overline{EP} = \frac{m\overline{EM} + n\overline{EQ}}{m+n}. \qquad (7)$$

Сравнивая равенства (6) и (7), видим, что в определяющем положении $\boldsymbol{R} = \mathbf{0}$. Но так как $\boldsymbol{R} = \text{const}$, то $\boldsymbol{R} = \mathbf{0}$ всегда. Значит, всегда имеет место равенство (7) и точки M, P, Q всегда лежат на одной прямой.

Упражнение 8. Доказать, что точки пересечения высот четырех треугольников BCD, ABE, DEF, ACF, образованных четырьмя попарно пересекающимися прямыми a, b, c, d, лежат на одной прямой (рис. 46).

Задача 5. *Пусть точка P лежит на окружности K, описанной вокруг треугольника ABC, и P_1, P_2, P_3 — проекции точки P на стороны $\triangle ABC$* (рис. 47). *Доказать, что точки P_1, P_2, P_3 лежат на одной прямой (это — так называемая прямая Симпсона, соответствующая точке P и треугольнику ABC).*

Решение. Будем вращать стороны AC и BC вокруг точек A и B с одной и той же угловой скоростью ω. Точка C при этом перемещается по окружности*) K. Так как углы PP_1A и PP_2A прямые, то точка P_2 движется по окружности K_1, проходящей через неподвижные точки A, P, P_1. При этом луч PP_2, будучи все время перпендикулярен к лучу AC,

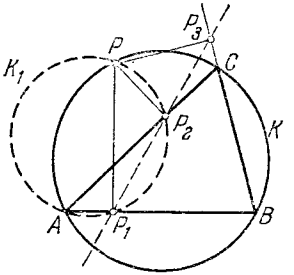


Рис. 47.

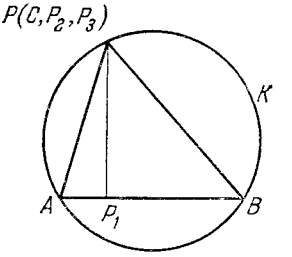


Рис. 48.

вращается вокруг точки P с той же угловой скоростью ω (согласно теореме 10 § 2). Поскольку лучи PP_2 и P_1P_2 вращаются так, что точка P_2 их пересечения движется по окружности K_1, то угол между ними остается постоянным. Следовательно, по теореме 10 их угловые скорости равны. Поэтому угловая скорость луча P_1P_2 равна ω. Аналогично равна ω угловая скорость луча P_1P_3.

Итак, лучи P_1P_2 и P_1P_3 вращаются с одной и той же угловой скоростью. Поэтому угол между ними постоянен. Чтобы обнаружить, что он равен нулю (и тем самым закончить доказательство), рассмотрим положение, в котором точка C совпадает с точкой P (рис. 48). В этом положении P_2 совпадает с P_3 (и с P и C) и рассматриваемый угол равен нулю. Значит, он равен нулю всегда.

Упражнения. 9. Пусть точки P и Q лежат на окружности K, описанной вокруг треугольника ABC. Доказать, что точка

*) В самом деле, так как угловые скорости лучей AC и BC равны между собой, то согласно теореме 10 угол ACB остается все время постоянным и, следовательно, точка C движется по дуге окружности K.

пересечения соответствующих прямых Симпсона p и q (рис. 49) описывает окружность K' при движении точки C по окружности K (точки A, B, P и Q считаются неподвижными).

10. Пусть точка P лежит на окружности K, описанной вокруг треугольника ABC, и P_1, P_2, P_3 — точки, симметричные с точкой P

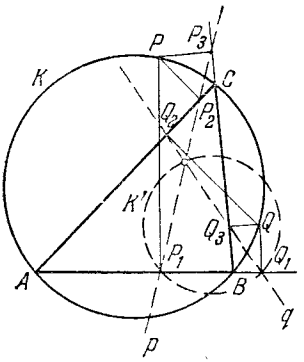


Рис. 49.

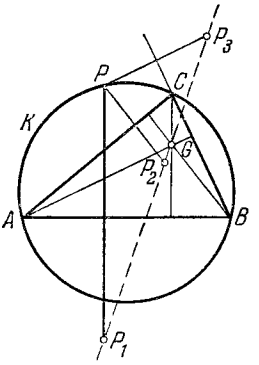


Рис. 50.

относительно сторон треугольника ABC. Доказать, что точки P_1, P_2 и P_3 лежат на одной прямой, проходящей через точку пересечения высот треугольника ABC (рис. 50).

Задача 6. *Доказать, что четыре окружности* K_1, K_2, K_3 *и* K_4, *описанные вокруг четырех треугольников* ABD, BFC, CED *и* AFE, *образованных четырьмя попарно пересекающимися прямыми* a, b, c, d, *проходят через одну точку* (рис. 51).

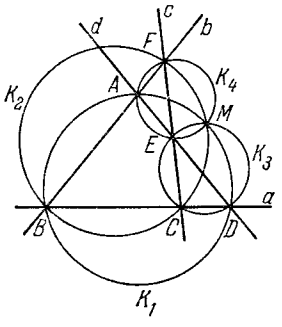


Рис. 51.

Решение. Так как окружности K_1 и K_2 имеют общую точку B, то они имеют еще одну общую точку *). Обозначим ее через M. Докажем, что M принадлежит также K_3 и K_4.

Закрепим точки B, C и D и начнем вращать вокруг них прямые b, c и d с одной и той же угловой скоростью ω. Так как угол BAD остается при этом постоянным (см. теорему 10 § 2), то

*) Если бы точка B была точкой касания окружностей K_1 и K_2, то треугольники ABD и BFC были бы подобны. При этом прямые AD и FC должны были бы быть параллельны, что противоречит условию.

точка A пересечения прямых b и d будет перемещаться по окружности K_1. Аналогично точка F пересечения прямых b и c будет двигаться по окружности K_2, а точка E пересечения прямых c и d — по окружности K_3.

В некоторый момент времени точка A совместится с точкой M (см. рис. 52, a) и, значит, через M пройдут

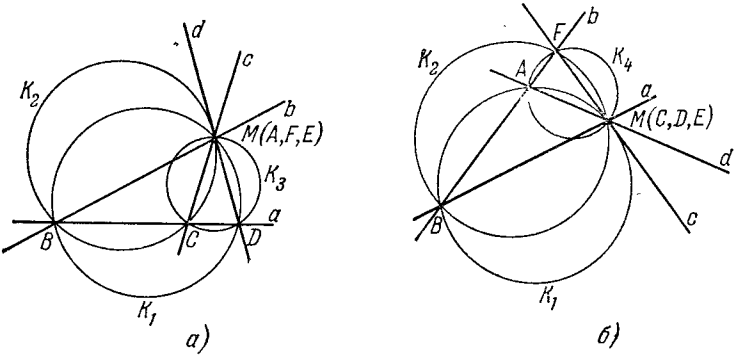


Рис. 52.

прямые b и d. Так как M принадлежит также K_2 и прямая b пересекается на K_2 с прямой c, то в этот

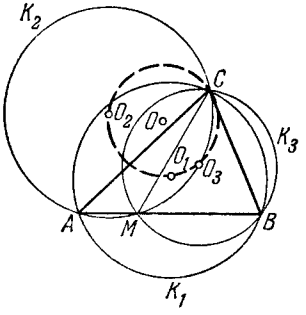


Рис. 53.

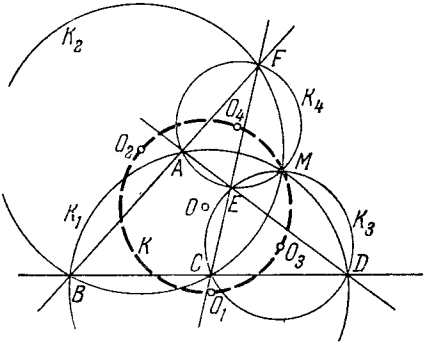


Рис. 54.

момент через точку M пройдут все три прямые b, c и d. Но точка пересечения прямых c и d принадлежит окружности K_3. Отсюда следует, что окружность K_3 проходит через прямую M.

Чтобы доказать, что через точку M проходит также окружность K_4, закрепим точки B, A и F и будем вращать вокруг них прямые a, d и c с одной и той же угловой скоростью (рис. 52, *б*). Аналогично предыдущему докажем, что в некоторый момент все три прямые a, d и c пройдут через точку M. Значит, через точку M проходит и окружность K_4, на которой пересекаются прямые c и d.

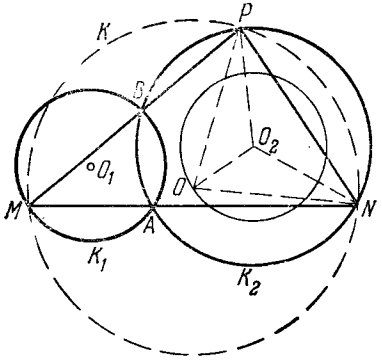


Рис. 55.

Упражнения. **11.** На стороне AB треугольника ABC взята произвольная точка M. Доказать, что центры O_1, O_2 и O_3 окружностей, описанных вокруг треугольников ABC, AMC и BMC, лежат на окружности, проходящей через точку C (рис. 53).

12. Теорема Штейнера. Доказать, что центры окружностей K_1, K_2, K_3, K_4 (см. условие задачи 6) лежат на одной окружности. Эта окружность проходит также через точку пересечения окружностей K_1, K_2, K_3 и K_4 (рис. 54).

Задача 7. *Даны две окружности K_1 и K_2* (рис. 55), *пересекающиеся в точках A и B. Точка M, движущаяся по окружности K_1, соединена с точками A и B. Пусть N и P — точки пересечения прямых MA и MB с окружностью K_2. Доказать, что центр O окружности K, описанной вокруг треугольника MNP, описывает окружность.*

Решение. При движении точки M по окружности K_1 лучи AN и BP вращаются вокруг точек A и B с одной и той же угловой скоростью ω. Угловые скорости радиусов O_2N и O_2P, проведенных из центра O_2 окружности K_2 в точки N и P, равны *) 2ω. Отсюда следует, что угол PO_2N остается постоянным и треугольник PO_2N движется, оставаясь неизменным. Так как длина хорды PN и угол PMN

*) Действительно, пусть за промежуток времени $[t, t+\Delta t]$ луч AN повернется на некоторый угол NAN'. За этот же промежуток времени радиус O_2N повернется на угол NO_2N', который как центральный равен удвоенному вписанному углу NAN'. Так как соотношение $\angle NO_2N' = 2\angle NAN'$ имеет место при любом Δt, то угловая скорость радиуса O_2N равна удвоенной угловой скорости луча AN.

постоянны, то окружность K, описанная вокруг треугольника MNP, движется, оставаясь неизменной. Вместе с её центром O и хордой PN движется, оставаясь неизменным, и треугольник PON. Отсюда следует, что движется, не изменяясь, и треугольник O_2ON. Так как его вершина O_2 неподвижна, то точка O описывает окружность.

Покажем, что радиус этой окружности равен радиусу окружности K_1. Для этого совместим точку M с точкой B (рис. 56). При этом секущая MBP превратится в касательную к окружности K_1 в точке B (см. п° 2 § 2). Хорда MA совпадет с хордой AB и точка N совместится с точкой B. Треугольник MNP «выродится» в отрезок BP (дважды покрытый). Центр O описанной вокруг него окружности лежит в точке пересечения перпендикуляра к хорде BP, проведенного через ее середину, и перпендикуляра к хорде AB, проведенного через точку B *). Отсюда следует, что четырехугольник O_1O_2OB — параллелограмм и $O_2O = R_1$.

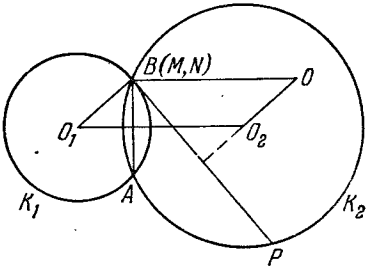


Рис. 56.

Итак, точка O описывает окружность с центром в точке O_2 и радиусом R_1.

Упражнения. **13.** Доказать, что сторона PN треугольника MNP (см. условие задачи 7) касается некоторой фиксированной окружности.

14. Доказать, что точка пересечения высот треугольника MNP, построенного в задаче 7, описывает окружность при движении точки M.

В заключение рассмотрим некоторые свойства эллипса, гиперболы и параболы. Определения этих кривых будут даны ниже.

Эллипсом называется кривая, состоящая из всех точек, сумма расстояний которых от двух заданных точек F_1 и F_2 равна заданной постоянной величине (рис. 57). Точки F_1 и F_2 называются *фокусами* эллипса.

*) Сторона MN треугольника MNP выродилась в точку, но направление этой вырожденной стороны определяется при переходе к пределу и совпадает с направлением хорды AB.

Задача 8. *Доказать, что касательная к эллипсу образует с радиусами-векторами, идущими из фокусов в точку касания, равные углы. Обратно, если касательная к кривой в каждой точке образует равные углы с радиусами-векторами, идущими из двух фиксированных точек F_1 и F_2 в точку касания, то эта кривая есть эллипс с фокусами в точках F_1 и F_2 (или дуга указанного эллипса).*

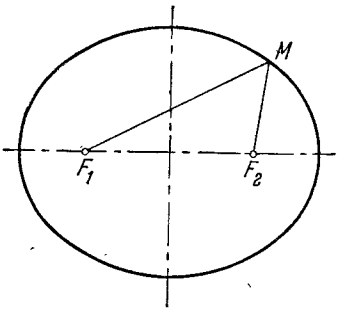


Рис. 57.

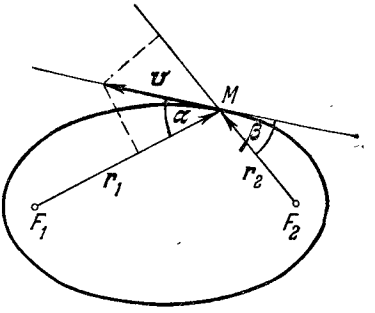


Рис. 58.

Решение. Пусть точка M движется по эллипсу со скоростью v. Проекции вектора v на радиусы-векторы *) $r_1 = \overline{F_1M}$ и $r_2 = \overline{F_2M}$ (рис. 58) соответственно равны

$$v_1 = \mathrm{np}_{r_1} v = -v\cos\alpha, \quad v_2 = \mathrm{np}_{r_2} v = v\cos\beta, \qquad (8)$$

где α и β — углы между r_1, r_2 и касательной. Так как по определению эллипса $|r_1| + |r_2| = \mathrm{const}$, то **)

$$v_1 + v_2 = 0.$$

Подставив сюда выражения для v_1 и v_2 из (8), получим:

$$v\cos\alpha - v\cos\beta = 0,$$

или

$$\cos\alpha = \cos\beta,$$

откуда $\alpha = \beta$, так как α и β — острые углы.

*) То есть на оси, направленные вдоль этих векторов.

**) Так как сумма $|r_1| + |r_2|$ есть величина постоянная, то приращения длин векторов r_1 и r_2 равны по абсолютной величине и противоположны по знаку. Следовательно, и скорости изменения длин векторов r_1 и r_2 равны по абсолютной величине и противоположны по знаку. Согласно п° 5 § 2 эти скорости как раз и есть v_1 и v_2.

Обратно, пусть касательная к кривой L образует с радиусами-векторами, идущими в точку касания из фиксированных точек F_1 и F_2, равные углы. Проектируя скорость v точки, движущейся по кривой L,

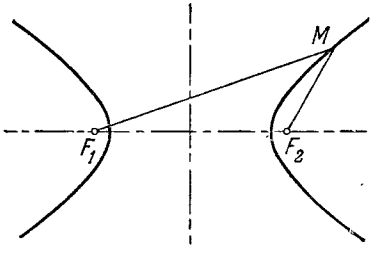


Рис. 59.

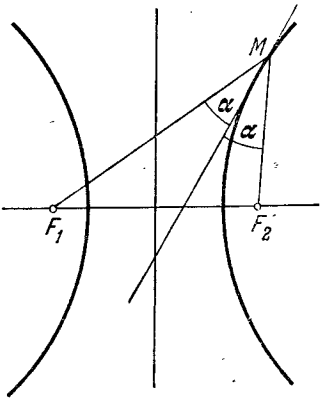


Рис. 60.

на радиусы-векторы r_1 и r_2 этой точки, получим:

$$v_1 = \text{пр}_{r_1} v = -v\cos\alpha, \quad v_2 = \text{пр}_{r_2} v = v\cos\alpha,$$

где α — угол между касательной и радиусами-векторами. Складывая эти равенства, получим:

$$v_1 + v_2 = 0,$$

откуда следует, что сумма длин радиусов-векторов r_1 и r_2 есть величина постоянная, т. е. кривая L является эллипсом.

Гиперболой называется кривая, состоящая из всех точек, разность расстояний которых от двух данных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная (рис. 59).

Упражнение. **15.** Доказать, что касательная к гиперболе является биссектрисой угла между радиусами-векторами, проведенными из фокусов в точку касания (рис. 60).

Обратно, если касательная к кривой в каждой точке является биссектрисой угла, образованного радиусами-векторами, идущими из двух фиксированных точек F_1 и F_2 в точку касания, то кривая L является гиперболой с фокусами в точках F_1 и F_2 (или дугой этой гиперболы).

Параболой называется кривая, состоящая из всех точек, расстояния которых от данной точки F, называемой

фокусом, и данной прямой d, называемой директрисой, равны между собой (рис. 61).

Упражнение. **16.** Доказать, что касательная к параболе является биссектрисой угла между радиусом-вектором, проведенным из фокуса F в точку касания, и перпендикуляром, опущенным из точки касания на директрису d (рис. 62).

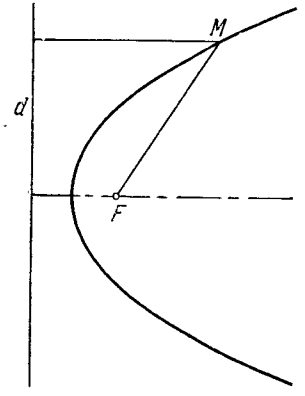


Рис. 61.

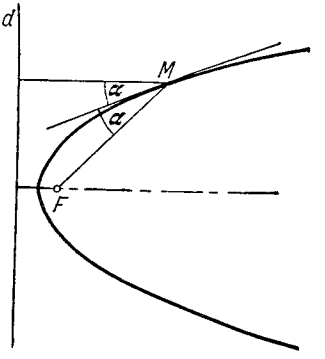


Рис. 62.

Обратно, пусть касательная к кривой в каждой точке является биссектрисой угла, образованного радиусом-вектором, идущим из фиксированной точки F в точку касания, и перпендикуляром, опущенным из точки касания на фиксированную прямую d. Тогда эта кривая есть парабола с фокусом F и директрисой, параллельной d (или дуга этой параболы).

В качестве дополнительных упражнений рекомендуем читателям решить кинематическим методом следующие задачи из журнала «Квант»: 1) 1970, № 4, стр. 27, задача М18 (а); 2) 1971, № 4, стр. 33, задача М79; 3) 1973, № 4, стр. 43, задача М198; 4) 1974, № 11, стр. 40, задача М291; 5) 1974, № 12, стр. 44, задача М297.

УКАЗАНИЯ К УПРАЖНЕНИЯМ

1. Решение аналогично решению задачи 1. Нужно заметить, что теперь для равностороннего треугольника ABC точки O_1, O_2, O_3 совместятся (треугольник $O_1O_2O_3$ «выродится» в точку), и векторы $\overline{O_1O_2}$ и $\overline{O_1O_3}$ обратятся в нуль. Тем самым из равенства

$$\overline{O_1O_3} = U_{\frac{\pi}{3}}\overline{O_1O_2} + \boldsymbol{R}$$

получится, что $\boldsymbol{R} = 0$.

2. Закрепить точки A, B и двигать точку C. Проследить при этом за скоростями точек A', B'. В определяющем положении совместить точку C с точкой C'.

3. Решение аналогично решению задачи 1. В определяющем положении точку C совместить с одной из точек A или B.

4. Решение аналогично решению задачи 3.

5. Закрепить точки A и B и двигать точки C и D. При этом движение точек C и D должно быть согласованным так, чтобы треугольник CSD с неподвижной вершиной S оставался равнобедренным треугольником. Показать, что $v_Q = v_T$.

6. Аналогично предыдущему упражнению показать, что $v_Q = -v_T$.

7. Аналогично задаче 1 доказать, что

$$\overline{AA'} = U_{-\frac{\pi}{3}}\overline{C'C}, \quad \overline{BB'} = U_{\frac{\pi}{3}}\overline{C'C}.$$

Отсюда вывести, что прямые AA', BB', CC' попарно пересекаются на окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

8. Закрепить прямые b, c и d и двигать прямую a параллельно самой себе с постоянной скоростью. Далее доказать, что

$$v_{O_3} = \lambda v_{O_1}, \quad v_{O_4} = \mu v_{O_1},$$

где $\lambda = \text{const}$, $\mu = \text{const}$. Равенство нулю констант $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$ установить, рассматривая два (!) определяющих положения: a проходит через точку A, a проходит через точку B. Воспользоваться тем, что вектор, коллинеарный одновременно двум пересекающимся прямым, равен нулю.

9. При движении точки C угловая скорость вращения прямых Симпсона p и q равна угловой скорости вращения лучей AC и BC.

10. Используя результат задачи 5, сначала доказать, что точки P_1, P_2, P_3 лежат на одной прямой. Затем, закрепив точки A, B и

P_3 вращать вокруг точек A и B прямые AC и BC с одной и той же угловой скоростью. Рассмотреть угловые скорости прямых $P_1P_2P_3$ и P_1G. Определяющее положение выбрать так же, как и в задаче 5.

11. Закрепить точки A и C и вращать вокруг них прямые AB, CM и CB с одной и той же угловой скоростью. Проследить за движением точек O_1, O_2 и O_3. Рассмотреть положение, в котором прямые AC и AB сливаются.

12. Закрепить точки B, C и D и вращать вокруг них прямые BF, CF и DA с одной и той же угловой скоростью до тех пор, пока они не пройдут через точку M. Далее использовать результат предыдущего упражнения.

13. Воспользоваться тем, что длина хорды PN остается постоянной (см. решение задачи 7).

14. Предварительно доказать, что расстояние от вершины треугольника до точки пересечения высот равно удвоенному расстоянию от центра окружности, описанной вокруг треугольника, до соответствующей стороны. Это легко сделать без кинематики. Далее воспользоваться тем, что при движении точек M, N и P прямые O_1M и NP остаются перпендикулярными одна к другой, а расстояние от точки O до прямой NP — постоянным.

15. Решение аналогично решению задачи 8.

16. Решение аналогично решению задачи 8, но вместо скорости изменения длины второго радиуса-вектора следует рассмотреть скорость изменения расстояния движущейся точки от директрисы.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 3
§ 1. Элементы векторной алгебры 6
§ 2. Элемеиты кинематики 18
§ 3. Кинематический метод в геометрических задачах . 27
Указаиия к упражиеииям 45

Юрий Ильич Любич
и *Леонид Абрамович Шор*

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД В ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

(Серия: «Популярные лекции по математике»)

М., 1976 г., 48 стр. с илл.

Редакторы *Ф. И. Кизнер, В. В. Донченко*

Техн. редактор *Е. В. Морозова*

Корректор *Л. С. Сомова*

Сдано в набор 11/VIII 1975 г.
Подписано к печати 19/II 1976 г.
Бумага тип. № 3 84×108$^{1}/_{32}$. Физ. печ. л. 1,5.
Услови. печ. л. 2,52. Уч.-изд. л. 2,14.
Тираж 100 000 экз. Цена 6 коп.
Заказ 859

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров
СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли.
198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.

№2278

Цена 6 коп.

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вып. 1. А. И. Маркушевич. Возвратные последовательности.
Вып. 2. И. П. Натансон. Простейшие задачи на максимум и минимум.
Вып. 3. И. С. Соминский. Метод математической индукции.
Вып. 4. А. И. Маркушевич. Замечательные кривые.
Вып. 5. П. П. Коровкин. Неравенства.
Вып. 6. Н. Н. Воробьев. Числа Фибоначчи.
Вып. 7. А. Г. Курош. Алгебраические уравнения произвольных степеней.
Вып. 8. А. О. Гельфонд. Решение уравнений в целых числах.
Вып. 9. А. И. Маркушевич. Площади и логарифмы.
Вып. 10. А. С. Смогоржевский. Метод координат.
Вып. 11. Я. С. Дубнов. Ошибки в геометрических доказательствах.
Вып. 12. И. П. Натансон. Суммирование бесконечно малых величин.
Вып. 13. А. И. Маркушевич. Комплексные числа и конформные отображения.
Вып. 14. А. И. Фетисов. О доказательствах в геометрии.
Вып. 15. И. Р. Шафаревич. О решении уравнений высших степеней.
Вып. 16. В. Г. Шерватов. Гиперболические функции.
Вып. 17. В. Г. Болтянский. Что такое дифференцирование?
Вып. 18. Г. М. Миракьян. Прямой круговой цилиндр.
Вып. 19. Л. А. Люстерник. Кратчайшие линии.
Вып. 20. А. М. Лопшиц. Вычисление площадей ориентированных фигур.
Вып. 21. Л. И. Головина и И. М. Ягдом. Индукция в геометрии.
Вып. 22. В. Г. Болтянский. Равновеликие и равносоставленные фигуры.
Вып. 23. А. С. Смогоржевский. О геометрии Лобачевского.
Вып. 24. Б. И. Аргунов и Л. А. Скорняков. Конфигурационные теоремы.
Вып. 25. А. С. Смогоржевский. Линейка в геометрических построениях.
Вып. 26. Б. А. Трахтенброт. Алгоритмы и машинное решение задач.
Вып. 27. В. А. Успенский. Некоторые приложения механики к математике.
Вып. 28. Н. А. Архангельский и Б. И. Зайцев. Автоматические цифровые машины.
Вып. 29. А. Н. Костовский. Геометрические построения одним циркулем
Вып. 30. Г. Е. Шилов. Как строить графики.
Вып. 31. А. Г. Дорфман. Оптика конических сечений.
Вып. 32. Е. С. Вентцель. Элементы теории игр.
Вып. 33. А. С. Барсов. Что такое линейное программирование.
Вып. 34. Б. Е. Маргулис. Системы линейных уравнений.
Вып. 35. Н. Я. Виленкин. Метод последовательных приближений
Вып. 36. В. Г. Болтянский. Огибающая.
Вып. 37. Г. Е. Шилов. Простая гамма (устройство музыкальной шкалы)
Вып. 38. Ю. А. Шрейдер. Что такое расстояние?
Вып. 39. Н. Н. Воробьев. Признаки делимости.
Вып. 40. С. В. Фомин. Системы счисления.
Вып. 41. Б. Ю. Коган. Приложение механики к геометрии.
Вып. 42. Ю. И. Любич и Л. А. Шор. Кинематический метод в геометрических задачах.
Вып. 43. В. А. Успенский. Треугольники Паскаля.
Вып. 44. И. Я. Бакельман. Инверсия.
Вып. 45. И. М. Яглом. Необыкновенная алгебра.
Вып. 46. И. М. Соболь. Метод Монте-Карло.
Вып. 47. Л. А. Калужнин. Основная теорема арифметики.
Вып. 48. А. С. Солодовников. Системы линейных неравенств.
Вып. 49. Г. Е. Шилов. Математический анализ в области рациональных функций.
Вып. 50. В. Г. Болтянский, И. Ц. Гохберг. Разбиение фигур на меньшие части.
Вып. 51. И. М. Бескин. Изображения пространственных фигур.
Вып 52. И. М. Бескин. Деление отрезка в данном отношении.
Вып. 53. Б. А. Розенфельд и Н. Д. Сергеева. Стереографическая проекция.